

Kombinatorika

Pravidlo súčtu

Ak máme napísať všetky možnosti je vhodné rozdeliť si ich do niekoľkých skupín, v každej skupine pracovať osobitne a nakoniec spočítať počty prvkov v jednotlivých skupinách.

Pravidlo súčinu

Počet všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvý člen môžeme vybrať práve n_1 spôsobmi, druhý člen po výbere prvého člena práve n_2 spôsobmi rovná sa $n_1 \cdot n_2$.

Počet všetkých usporiadaných k -tic, ktorých prvý člen možno vybrať práve n_1 spôsobmi, druhý člen po výbere prvého člena práve n_2 spôsobmi atď., až k -tý člen po výbere $(k-1)$ -ho člena práve n_k spôsobmi, rovná sa $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$

Kombinatorické úlohy

Budeme sa zaoberať k -člennými skupinami prvkov z n -prvkovej množiny. Budeme rozlišovať či v týchto skupinách :

1. záleží na poradí prvkov – variácie, permutácie
2. nezáleží na poradí prvkov - kombinácie

Príklady :

1. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 10 Sk pomocou 5 Sk, 2 Sk, 1 Sk.
2. Koľko párnych trojciferných čísel môžeme napísať z cifier 2,3,4,5.
3. Koľko párnych trojciferných čísel môžeme napísať z cifier 0,1,2,3.
4. V triede je 34 žiakov, 14 chlapcov, 20 dievčat. Koľko dvojíc môžeme z nich vytvoriť ?

VARIÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Def.: Daná je konečná množina M , ktorá má n prvkov. Každá usporiadaná k -tica zostavená z prvkov množiny M tak, že sa v nej ani jeden prvok neopakuje, sa nazýva variácia k -tej triedy z n prvkov bez opakovania.

Príklad 1: Daná je $M = \{a, b, c\}$. Napíšme : a) variácie 2. druhej triedy z prvkov množiny M
b) variácie bez opakovania 2. triedy z prvkov mn. M

a) $\begin{bmatrix} [a, a] & [b, a] & [c, a] \\ [a, b] & [b, b] & [c, b] \\ [a, c] & [b, c] & [c, c] \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} * & [b, a] & [c, a] \\ [a, b] & * & [c, b] \\ [a, c] & [b, c] & * \end{bmatrix}$

Príklad 2: Z chlapcov Adam, Boris, Cyril, Dávid treba vybrať na branné cvičenie 3-člennú hliadku, v ktorej bude veliteľ, chemik a zdravotník. Napíšme zoznam všetkých hliadok.

$\begin{bmatrix} [A,B,C] & [B,A,C] & [C,A,B] & [D,A,B] \\ [A,B,D] & [B,A,D] & [C,A,D] & [D,A,C] \\ [A,C,B] & [B,C,A] & [C,B,A] & [D,B,A] \\ [A,C,D] & [B,C,D] & [C,B,D] & [D,B,C] \\ [A,D,B] & [B,D,A] & [C,D,A] & [D,C,A] \\ [A,D,C] & [B,D,C] & [C,D,B] & [D,C,B] \end{bmatrix}$

$V_k(n)$ – počet všetkých variácií k -tej triedy z n prvkov bez opakovania

$$V_k(n) = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k(n) = V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

PLATÍ: $1! = 1$ $0! = 1$

Príklad 3: $V(2,5) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

Príklad 4: $V(2, n) = 210$, $n = ?$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 210 \quad \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{(n-2)\dots 1} = 210$$

$$n(n-1) = 210 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0 \Rightarrow$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 210}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{1 \pm 29}{2} \Rightarrow n_1 = 15 \wedge n_2 = -14$$

Príklad 5: Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých 3 miestach na hokejových majstrovstvách sveta, ak na nich hrá 8 družstiev?

$$V(3,8) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 336$$

1. VARIÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Def : Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom sa žiadny prvok v k-tici neopakuje t.z. z n prvkov vyberáme k prvkov, záleží pritom na poradí a prvky sa neopakujú.

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

1. a) Koľko dvojciferných čísel možno vytvoriť z čísel 1,2,3,4,5,6, ak sa čísla nesmú opakovať ?
b) Koľko trojciferných čísel možno vytvoriť z čísel 1,2,3,4,5,6, ak sa čísla nesmú opakovať ?
c) Koľko štvorciferných čísel možno vytvoriť z čísel 1,2,3,4,5,6, ak sa čísla nesmú opakovať ?
d) Koľko päťciferných čísel možno vytvoriť z čísel 1,2,3,4,5,6, ak sa čísla nesmú opakovať ?
2. V čate je dvanásť vojakov. Koľko rôznych dvojčlenných hliadok z nich možno zostaviť, ak jeden z dvojice má byť veliteľom ? [132]
3. Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých troch miestach na hokejových majstrovstvách sveta, ak na nich hrá 8 mužstiev ? [336]
4. Koľko je 8-ciferných čísel vytvorených z čísl 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ? [362880]
5. V triede je 26 žiakov. Koľko trojčlenných výborov – predseda, pokladník, referent – z nich možno vytvoriť ? [15 600]
6. Koľkými spôsobmi môžu byť odmenení 1.,2.,3. Cenou trinásti účastníci športovej súťaže ? [1716]
7. Koľko je párnych prirodzených čísel, v zápise ktorých sa vyskytujú cifry 2,3,4,5 iba raz ? [12]
8. Koľko možností dvojciferných čísel pribudne, ak počet cifier zvýšime z 5 na 7 cifier ? [22]
9. Koľko rôznych 4-ciferných čísel s rôznymi ciframi môžeme zostaviť z cifier 1,2,3,4,5,6 ?
Koľko z nich je deliteľných číslom 5 ? Koľko z nich sú párne čísla ? [360,60,180]
10. Koľko rôznych 5-ciferných čísel s rôznymi ciframi môžeme zostaviť z cifier 0,2,4,6,7,8,9 ?
Koľko z nich je deliteľných číslom 4 ? Koľko z nich je deliteľných číslom 10 ? Koľko z nich sú párne čísla ? [2160, 200, 30, 150]
11. Určite počet všetkých prirodzených čísel väčších ako 2000, v zápisoch ktorých sa vyskytujú cifry 1,2,4,6,8, a to každá najviac raz. [96]
12. Koľko prirodzených čísel väčších ako 300 možno napísať pomocou čísl 1,2,3,4, ak sa žiadna číslica neopakuje ? [36]
13. Koľko prirodzených čísel menších ako 500 možno napísať pomocou čísl 4,5,6,7, ak žiadna číslica sa neopakuje ? [22]
14. Koľko jedno až päťciferných prirodzených čísel možno napísať číslicami 0,1,2,3,4, ak sa žiadna neopakuje ? [260]
15. Koľko rôznych vlajok z troch vodorovných alebo zvislých pruhov rôznej farby možno vytvoriť z látok bielej, zelenej, červenej a žltej farby ? [48]
16. Koľko existuje štvorciferných prirodzených čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne?

VARIÁCIE S OPAKOVANÍM

Def.: Nech k, n sú prirodzené čísla, a nech je daná končená množina M , ktorá má n prvkov. Každá usporiadaná k -tica zostavená z prvkov množiny M sa nazýva variácia k -tej triedy z n prvkov množiny M .

Príklad 1: Nech je daná $M = \{a, b, c\}$. Variácie 2. triedy (s opakovaním), teda všetky usporiadané dvojice z 3 prvkov množiny M sú :

[a, a] [b, a] [c, a]
[a, b] [b, b] [c, b]
[a, c] [b, c] [c, c]

Príklad 2: $M = \{1, 5\}$. Variácie 4. triedy – všetky usporiadané štvorice – z prvkov množiny M sú :

[1,1,1,1] [5,1,1,1]
[1,1,1,5] [5,1,1,5]
[1,1,5,1] [5,1,5,1]
[1,5,1,1] [5,1,5,5]
[1,1,5,5] [5,5,1,1]
[1,5,1,5] [5,5,1,5]
[1,5,5,1] [5,5,5,1]
[1,5,5,5] [5,5,5,5]

Pri riešení úloh netreba zvyčajne nájsť a vypísať všetky variácie k -tej triedy z n prvkov danej množiny, ale stačí zistiť ich počet.

Veta : Pre všetky $k, n \in N$ platí : $V'(k, n) = n^k$.

V príklade 1. $n = 3$ $k = 2$ $V'(2, 3) = 3^2 = 9$

V príklade 2. $n = 2$ $k = 4$ $V'(4, 2) = 2^4 = 16$

Príklad 3: a) Koľko rôznych telefónnych staníc možno zapojiť na telefónnu centrálu, ak sú všetky čísla staníc 5-ciferné?
b) Koľko môže byť týchto staníc, ak sa ich číslo nemôže začínať nulou?

a) $n = 10, k = 5$, $V'(k, n) = V'(5, 10) = 10^5$

b) Počet čísel, ktoré sa začínajú nulou (0 . . .) je $n = 10, k = 4$, $V'(k, n) = V'(4, 10) = 10^4$

Počet čísel, ktoré sa nezačínajú nulou je $V'(5, 10) - V'(4, 10) = 10^5 - 10^4 = 90000$.

Príklad 4: Koľko znakov, ktoré sú zložené z 1 až 4 signálov môže obsahovať Morseova abeceda?

$n = 2$ z jedného signálu ...	$k = 1$	$V'(1, 2) = 2^1 = 2$
z 2 signálov ...	$k = 2$	$V'(2, 2) = 2^2 = 4$
z 3 signálov ...	$k = 3$	$V'(3, 2) = 2^3 = 8$
zo 4 signálov ...	$k = 4$	$V'(4, 2) = 2^4 = 16$
z 1 ... 4 signálov ...		$V'(1, 2) + V'(2, 2) + V'(3, 2) + V'(4, 2) = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

2 . VARIÁCIE S OPAKOVANÍM

Def : Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom sa prvky v k-tici môžu ľubovoľne opakovať t.z. z n prvkov vyberáme k prvkov, záleží pritom na poradí a prvky sa opakujú.

$$V'(n, k) = n^k$$

1. Koľko dvojciferných čísel vytvoríme z cifier 1,2,3 ? [9]
2. Koľko päťciferných čísel vytvoríme z cifier 1,2,3 ? [243]
3. Koľko je trojciferných čísel, ktoré obsahujú len číslice 1 a 2. [8]
4. Koľko rôznych telefónnych staníc možno zapojiť, ak sú všetky telefónne čísla
a) päťmiestne , b) šesťmiestne ? Nulu na prvom mieste nepripúšťame. [90 000,900 000]
5. Koľko trojciferných čísel možno vytvoriť z cifier 1,2,3,4,5 ? [125]
6. Koľko rôznych štátnych poznávacích značiek na autá (použije sa 24 písmen a 10 číslic) možno
vyhotoviť, ak sa značka skladá :
a) z dvoch písmen a štyroch číslic b) z troch písmen a štyroch číslic ?
[5 760 000;138 240 000]
8. Koľko je všetkých trojciferných prirodzených čísel ? [900]

PERMUTÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Príklad 1: Napíšme všetky variácie 4. triedy bez opakovania z množiny {a, b, c, d}

[a, b, c, d]	[b, a, c, d]	[c, a, b, d]	[d, a, b, c]
[a, b, d, c]	[b, a, d, c]	[c, a, d, b]	[d, a, c, b]
[a, c, b, d]	[b, c, a, d]	[c, b, a, d]	[d, b, a, c]
[a, c, d, b]	[b, c, d, a]	[c, b, d, a]	[d, b, c, a]
[a, d, b, c]	[b, d, a, c]	[c, d, a, b]	[d, c, a, b]
[a, d, c, b]	[b, d, c, a]	[c, d, b, a]	[d, c, b, a]

$$V(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$V(4, 4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Def.: Variácie n -tej triedy bez opakovania z n -prvkovej množiny nazývame permutácie.

Počet všetkých permutácií z n prvkov budeme označovať $P(n)$.

Pretože platí $P(n) = V(n, n)$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$: $P(n) = n!$

Príklad 2: Koľkými spôsobmi možno vedľa seba uložiť 6 rôznych kníh?

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Príklad 3: Koľkými spôsobmi môže stáť v zástupe 5 vojakov A, B, C, D, E tak, aby vojak bol A bol prvý a vojak E posledný?

$$A \dots E \quad P(3) = 3! = 6$$

Príklad 4: Upravte! a) $(n+1)! - n \cdot n! = (n+1) \cdot n! = n! \cdot (n+1-n) = n! \cdot 1 = n!$

$$\text{b) } \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n+1-n = 1$$

Príklad 5: Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať množinu čísel {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ak má byť číslica 2 na treťom a číslica 9 na piatom mieste?

$$\dots 2 \dots 9 \dots \quad P(8) = 8! = 40320$$

Príklad 6: Máme skupinu troch rôznych prvkov a, b, c . Koľko rôznych trojpísmenových výrazov z nich môžeme utvoriť?

Permutácie týchto prvkov predstavujú skupiny $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Ich počet je teda $P(3) = 3! = 6$

3 . PERMUTÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Def : Permutácie n-tej triedy z n prvkov bez opakovania sú usporiadané n-tice vytvorené z n prvkov, pričom sa prvky v n-tici nemôžu opakovať. t.z. z n prvkov vyberáme n prvkov, záleží pritom na poradí a prvky sa neopakujú.

$$P(n, n) = n !$$

1. Koľkými spôsobmi možno vedľa seba uložiť a) 4 rôzne knihy, b) 5 rôznych kníh ? (24, 120)
2. Koľko trojciferných prirodzených čísel možno napísať pomocou číslíc 1,2,3, ak sa nemôžu opakovať ? (6)
3. Koľko deväťciferných čísel možno napísať zo všetkých cifier, okrem nuly ? [362 880]
4. Koľko šesťciferných čísel možno vytvoriť z čísel 1,2,3,4,5,6, ak sa čísla nesmú opakovať ? [720]
5. Ak sa zväčší počet prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásťkrát. Koľko je prvkov ? [2]
6. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 362 880 permutácií ? [9]
7. Koľko je 9-ciferných čísel vytvorených z číslíc 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ? [362 880]
8. Koľko 5-ciferných čísel možno vytvoriť z cifier 1,1,2,3,3. ? [30]
9. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť 20 žiakov do radu pri nástupe na telocvik ? [20!]
10. Koľkými spôsobmi môžeme postaviť na policičku 15 rôznych kníh? [15!]
11. Dana dostala 4 nové knihy. Koľko je rôznych poradí, v ktorých si ich mohla prečítať ? [24]
12. V tipovacej súťaži 6 zo 40 vyšlo týchto šesť čísel: 3, 6, 7, 23, 34, 40 . Koľkými spôsobmi ich mohli vytiahnuť ? [720]

PERMUTÁCIE S OPAKOVANÍM

Definícia: Permutácia z n prvkov s opakovaním je každá usporiadaná n -tica, vytvorená z m rôznych prvkov tak, že prvý prvok sa v nej vyskytuje práve k_1 -krát, druhý práve k_2 -krát atď., až m -tý prvok k_m -krát, pričom $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Ak sa prvky vo výbere môžu opakovať, tak počet permutácií s opakovaním je určený ako

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!},$$

pričom medzi vybranými prvkami je k skupín, ktoré majú postupne $n_1, n_2, \dots, n_k$ rovnakých prvkov.

Musí pritom platiť :
$$n = \sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Vysvetlenie: $n!$ v čitateli je počet všetkých permutácií bez opakovania z n prvkov. Ak by sa nejaký prvok opakoval práve 2-krát, museli by sme podeliť tento počet dvomi, pretože je v ňom zarátaná každá dvojica 2-krát. Ak by sa nejaký prvok opakoval 3-krát, museli by sme tento počet deliť číslom 3!.

Príklad 1: Sú dané predmety k rôznych druhov. Koľko permutácií sa dá vytvoriť z n_1 predmetov 1. druhu, n_2 predmetov 2. druhu, ... n_k predmetov k -teho druhu?

1. druh	n_1	
2. druh	n_2	
.		
k . druh	n_k	$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Príklad 2: Koľko permutácií sa dá vytvoriť zo slova „Mississippi“?

$n_M = 1$		
$n_I = 4$		
$n_S = 4$	$n = n_M + n_I + n_S + n_P = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$	$P(1,4,4,2) = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$
$n_P = 2$		

Príklad 3: Máme skupinu troch prvkov a, a, b . Skupina je teda zložená z dvoch skupín (teda $k = 2$), pričom prvá skupina dva prvky a , tzn. $n_1 = 2$, a druhá skupina obsahuje jeden prvok b , tzn. $n_2 = 1$.

Permutáciami s opakovaním získame skupiny aab, aba, baa . Počet týchto skupín je tedy rovný

$$P_{2,1}(3) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

4 . PERMUTÁCIE S OPAKOVANÍM

Def : Permutácie s opakovaním z n prvkov sú usporiadané n -tice vytvorené z n prvkov, pričom sa prvky v n -tici môžu ľubovoľne opakovať t.z. z n prvkov vyberáme n prvkov, záleží pritom na poradí a prvky sa opakujú. Počet n prvkov sa rozdelí na prvky n_1 1.druhu, n_2 2 druhu, n_k k.druhu, pričom $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_k}(n) = n! : (n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!)$$

1. Koľkými spôsobmi možno vedľa seba uložiť a) tri b) štyri c) päť rovnakých kníh? (1,1,1)
2. Máme vždy použiť tri písmená A,A,B na vytvorenie skratky pre spevácku skupinu. Koľko bude možností ? (3)
3. Máme vždy použiť štyri písmená A,A,B,B na vytvorenie skratky pre spevácku skupinu. Koľko bude možností ? (6)
4. Aranžér má vo výklade zoradiť vedľa seba dva rovnaké biele svetle, dva rovnaké zelené svetle a jeden modrý. Koľkými možnými spôsobmi môže výklad upraviť ? (30)
5. Koľkými spôsobmi môžeme navliecť na niť jednu bielu, jednu zelenú a jednu žltú korálku ? (3)
6. Koľko 5-písmenových slov možno vytvoriť zo slova PRAHA ? (60)
7. Pre siedmich vyznamenaných žiakov kúpila pani učiteľka 2 rovnaké slovenské, 2 rovnaké nemecké a 3 rovnaké anglické knihy. Koľkými spôsobmi ich môže uložiť na seba, jednu na druhú do stĺpca? (210)
8. Vo vydavateľstve kúpil Janko 3 rovnaké fyziky, 2 rovnaké matematiky a 3 rovnaké geometrie. Koľkými spôsobmi ich môže položiť do tašky ? (560)
9. Koľko slov možno vytvoriť zo všetkých písmen slova BRATISLAVA ? (60 4800)
10. Koľko možností majú obyvatelia štátu MISSISSIPPI na výber názvu svojho štátu, ak musia použiť všetky písmená ? (34 650)
11. Koľko rôznych poradí so 6 prvkami možno vytvoriť z troch písmen A, dvoch písmen B a jedného písmena C ? (60)
12. Koľko rôznych poradí so 6 prvkami možno vytvoriť z troch písmen A, troch písmen B ? (20)
13. Koľko rôznych poradí so 7 prvkami možno vytvoriť z troch písmen A, troch písmen B a jedného písmena C ? (140)
14. Na policičke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky.
 - a) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť ? (210)
 - b) Koľko, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba ? (6)
15. Koľko je všetkých jedno až päťciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje číslice 0,1,2,3 ? (1024)

KOMBINÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Def.: Nech je daná konečná množina M , ktorá má n prvkov. Každá podmnožina tejto množiny, ktorá má k prvkov, sa nazýva kombinácia bez opakovania k -tej triedy z n prvkov. Pritom n, k sú také nezáporné celé čísla, že $k \leq n$.

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Príklad 1: Napíšme všetky a) kombinácie, b) variácie bez opakovania 3. triedy z prvkov množiny $M = \{a, b, c, d\}$.

a) kombinácie	$\{a, b, c\},$	$\{a, b, d\},$	$\{a, c, d\},$	$\{b, c, d\}$	b)
variácie bez opakovania					
	$[a, b, c]$	$[b, a, c]$	$[c, a, b]$	$[d, a, b]$	
	$[a, b, d]$	$[b, a, d]$	$[c, a, d]$	$[d, a, c]$	
	$[a, c, b]$	$[b, c, a]$	$[c, b, a]$	$[d, b, a]$	
	$[a, c, d]$	$[b, c, d]$	$[c, b, d]$	$[d, b, c]$	
	$[a, d, b]$	$[b, d, a]$	$[c, d, a]$	$[d, c, a]$	
	$[a, d, c]$	$[b, d, c]$	$[c, d, b]$	$[d, c, b]$	24 variácií

Keď z $\forall$ kombinácií vytvoríme $\forall$ permutácie dostaneme všetky variácie bez opakovania.

$$V(k, n) = C(k, n) \cdot P(k)$$

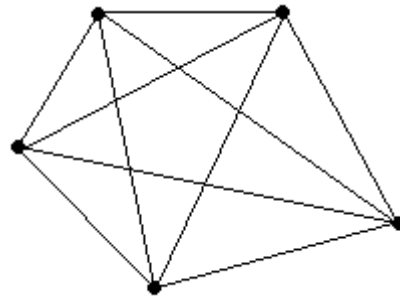
$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad P(k) = k! \quad \text{pre } \forall k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = C(k, n) \cdot k!$$

$$C(k, n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$V(3, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$C(3, 4) = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = 4$$



Príklad 2: Určte počet uhlopriečok v konvexnom n -uholníku.

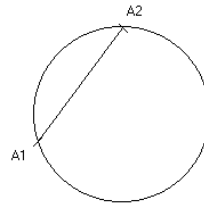
Počet priamok, ktoré spájajú 2 ľubovoľné vrcholy konvexného n -uholníka je $C(2, n)$. Aby sme zistili počet uhlopriečok, odčítame od tohto počtu počet strán n -uholníka.

$$C(2, n) - n = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Príklad 3: Na kružnici sú dané body $A_1, A_2, \dots, A_{12}$.

Vypočítajte: a) počet tetív určených týmito bodmi,
b) počet trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch,
c) počet konvexných štvoruholníkov s vrcholmi v týchto bodoch.

$$\begin{aligned} \text{a) } C(2,12) &= \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \\ \text{b) } C(3,12) &= \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220 \\ \text{c) } C(4,12) &= \binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495 \end{aligned}$$



Príklad 4: Na brigáde bolo 15 chlapcov a 20 dievčat. Koľko rôznych služieb možno určiť, ak sa majú skladať z 2 chlapcov a 1 dievčaťa?

$$C(2,15) \cdot C(1,20) = \binom{15}{2} \cdot \binom{20}{1} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} \cdot 20 = \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 20 = 15 \cdot 14 \cdot 10 = 2100$$

Príklad 5: Cestovné lístky dopravného podniku majú 9 očíslovaných okienok. Koľkými spôsobmi môžu byť nastavené navzájom rôzne kódy u označujúcich strojčekoch, ak sa 3 alebo 4 okienka?

$$C(3,9) + C(4,9) = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} + \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5!} = 84 + 126 = 210$$

Príklad 6: Určite všetky n , pre ktoré platí $C(2,n) = 28$!

$$\binom{n}{2} = 28$$

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 28$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2(n-2)!} = 28$$

$$n(n-1) = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 56}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{16}{2} = 8 \wedge n_2 = -\frac{14}{2} = -7$$

5. KOMBINÁCIE BEZ OPAKOVANIA

Def : Kombinácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom sa žiadny prvok v k-tici neopakuje t.z. z n prvkov vyberáme k prvkov, pričom nezáleží na poradí a prvky sa neopakujú.

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad . \quad \binom{n}{k} \text{ je definované pre } n \geq k \geq 0$$

1. Šiesti chlapci sa majú dvojsedačkou vyviešť na kopec. Koľko možností existuje ? [15]
2. V triede je 30 žiakov. Koľkými spôsobmi možno vybrať štvoricu žiakov na skúšanie ? [27 405]
3. Na bežeckej trati beží 8 pretekárov. Do finále postupujú prvý traja. Koľko je možností na postup ? [56]
4. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 12 hráčov na dve šesťčlenné družstvá ? [924]
5. Miestny cestovný lístok obsahuje cifry 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Pri každej jazde sa strojčekom prederavia tri cifry. Koľko je všetkých možností označenia cestovných lístkov ? [84]
6. Koľko rôznych tipov je v Matese (5 z 35) ? [324632]
7. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 4 dievčatá a 8 chlapcov na dve šesťčlenné volejbalové družstvá tak, aby v každom družstve boli dve dievčatá a 4 chlapci ? [60]
8. Koľkými spôsobmi možno zo skupiny 10 dievčat a 5 chlapcov vybrať trojicu, v ktorej sú dve dievčatá a jeden chlapec ? [225]
9. Koľko rôznych priamok určuje 7 bodov, ak žiadne tri neležia na jednej priamke? [21]
10. Koľkými priamkami možno spojiť 10 bodov, keď tri z nich ležia na jednej priamke ?
[C(2,10)-C(2,3)+1= 43]
11. V krabici je 10 výrobkov, z ktorých sú práve tri chybné. Koľkými spôsobmi možno vybrať 5 výrobkov tak, aby

a) žiadny nebol chybný	d) práve dva boli chybné
b) práve jeden bol chybný	e) najviac dva boli chybné
c) najviac jeden bol chybný	f) aspoň dva boli chybné ?

[a) 21 b) 105 c) 126 d) 105 e) 231 f) 126]
12. Koľko rôznych šesťčlenných družstiev možno zostaviť zo siedmich chlapcov a štyroch dievčat, ak v družstve majú byť dve alebo štyri dievčatá ? {C(2,4).C(4,7) + C(4,4).C(2,7) = 231}
13. Koľko možností by bolo pri ťahu športky, keby sa počet športov rozšíril na 90 a počet ťahaných čísel sa zmenšil na 5 ? (43 949 268)
14. Koľko štvorčlenných družstiev možno vytvoriť z 12 športovcov ? (495)
15. V triede je 18 chlapcov a 14 dievčat. Koľkými spôsobmi sa môžu zvoliť do triedneho výboru traja zástupcovia, ak to majú byť a) samí chlapci b) samé dievčatá c) dvaja chlapci a jedno dievča ? (816, 364, C¹⁸₂.C¹⁴₁ = 2 142)
16. Učiteľ má 20 geometrických a 30 aritmetických príkladov. Na úlohu má vybrať 1 geometrický a 2 aritmetické príklady. Koľko je možností rôznych úloh ? $\binom{20}{1} \cdot \binom{30}{2} = 8700$
17. Družstvo futbalistov malo 3 brankárov, 5 obrancov, 4 záložníkov a 10 útočníkov. Koľko rôznych mužstiev mohol tréner zostaviť na jednotlivé zápasy ? $\binom{10}{5} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30240$

KOMBINÁCIE S OPAKOVANÍM

Príklad 1: V obchode predávajú 3 druhy sirupov – jablkový, malinový, pomarančový. Koľkými spôsobmi možno kúpiť 4 fľaše sirupu?

- nezáleží na poradí : nie sú to variácie
- môžu sa opakovať : sú to kombinácie

J	4	0	0	3	3	0	1	1	0	2	2	0	2	1	1
B	0	4	0	1	0	3	3	0	1	2	0	2	1	2	1
P	0	0	4	0	1	1	0	3	3	0	2	2	1	1	2

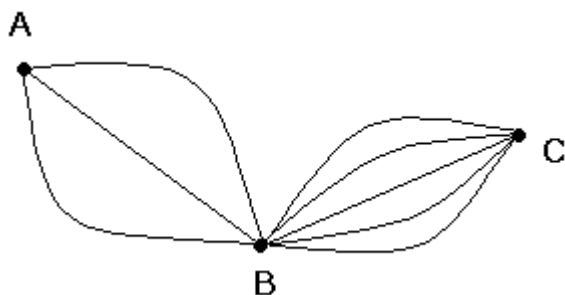
15 možností

máme kúpiť 4 fľaš $k = 4$
 vyberáme z 3 druhov $n = 3$

$$C'(k, n) = C(k, n + k - 1)$$

$$C'(4, 3) = C(4, 3 + 4 - 1) = C(4, 6) = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$$

Príklad 2: Z mesta A do mesta B vedie m ciest, z mesta B do mesta C n ciest. Koľko ciest vedie z A do C cez B?



$A \rightarrow B$ 3 cesty
 $B \rightarrow C$ 5 ciest
 $A \rightarrow C$ $3 \cdot 5 = 15$ ciest

Z mesta A do mesta C cez mesto B vedie $m \cdot n$ ciest.

6. KOMBINÁCIE S OPAKOVANÍM

Def : Kombinácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním sú usporiadané k-tice vytvorené z n prvkov, pričom sa prvky v k-tici môžu opakovať t.z. z n prvkov vyberáme k prvkov, pričom nezáleží na poradí a prvky sa môžu opakovať.

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

1. Koľko kombinácií 3. triedy možno vytvoriť z čísl 3, 4, 5, 6, 7 ? (35)
2. Koľko rôznych súčinov dvoch činiteľov možno utvoriť z čísel 2 a 3 ? (3)
3. Koľko rôznych súčinov dvoch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3 a 5 ? (6)
4. Koľko rôznych súčinov dvoch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3, 5 a 7 ? (10)
5. Koľko rôznych súčinov troch činiteľov možno utvoriť z čísel 2 a 3 ? (4)
6. Koľko rôznych súčinov troch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3 a 5 ? (10)
7. Koľko rôznych súčinov troch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3, 5 a 7 ? (20)
8. V obchode majú jahodovú a mliečnu čokoládu. Máme kúpiť tri kusy.
Koľkými spôsobmi ich môžeme kúpiť ? (4)
9. Koľko máme všetkých možností kúpiť si 5 čokolád z dvoch druhov ? (6)
10. V predajni majú desať druhov pohľadníc.
 - a) koľko možností je na nákup 12 pohľadníc ? $C'(12, 10)$
 - b) koľko možností je na nákup 8 pohľadníc ? $C'(8, 10)$
 - c) koľko možností je na nákup ôsmich rôznych pohľadníc ? $C(8, 10)$
11. V obchode majú 9 druhov pohľadníc. Koľkými spôsobmi možno kúpiť 14 pohľadníc ? [319 770]

KOMBINAČNÉ ČÍSLA

VLASTNOSTI KOMBINAČNÝCH ČÍSEL $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{10}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{6}{6} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \binom{5}{1} = 5 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{6}{2} = \binom{6}{4}$$

Sčítajte:

a) $\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$

b) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10}$

c) $\binom{20}{7} + \binom{20}{8}$

d) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10}$

e) $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$

f) $\binom{15}{7} + \binom{15}{7}$

Doplňte miesto x reálne číslo tak, aby platili rovnosti:

a) $\binom{10}{4} = \binom{10}{x}$

b) $\binom{12}{3} = \binom{12}{x}$

c) $\binom{11}{7} = \binom{11}{x}$

d) $\binom{23}{18} = \binom{23}{x}$

e) $\binom{15}{10} = \binom{x}{5}$

f) $\binom{19}{7} = \binom{x}{12}$

Vypočítajte : a) $10! : (3! \cdot 4! \cdot 5!) =$

b) $(7! + 5!) : 5! =$

c) $(7! + 6! + 5!) : (8! - 7!) =$

Vypočítajte:

a) $\binom{83}{2} + \frac{306!}{304!}$

b) $\binom{75}{72} + \frac{153!}{151!}$

c) $\binom{101}{99} - \frac{202!}{200!}$

d) $\binom{71}{68} - \frac{89!}{87!}$

e) $\binom{77}{74} - \frac{273!}{271!}$